



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, Neamț

07.02.2026

Barem de notare și evaluare

Clasa a VII-a

## Subiectul 1 (22,5 puncte)

a) Arătați că  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}} < 14$

SGM 9/2025

b) Fie a, b, c numere reale astfel încât  $\sqrt{89 - 16a + a^2} + \sqrt{b^2 - 12b + 45} + \sqrt{41 + c^2 - 10c} + |2025 - d| \leq 12$ . Calculați media aritmetică a celor 4 numere.

**Soluție și barem:**

a)  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} < \sqrt{6 + \sqrt{6 + 3}} = \sqrt{6 + 3} = 3$

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} < \sqrt{20 + \sqrt{20 + 5}} = \sqrt{20 + 5} = 5$$

$$\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}} < \sqrt{30 + \sqrt{30 + 6}} = \sqrt{30 + 6} = 6 \quad \dots\dots\dots 6p$$

Adunând relațiile obținem  $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}} + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}} < 14 \quad \dots\dots\dots 4p$

b)  $\sqrt{89 - 16a + a^2} = \sqrt{(a - 8)^2 + 25} \geq 5$

$$\sqrt{b^2 - 12b + 45} = \sqrt{(b - 6)^2 + 9} \geq 3$$

$$\sqrt{41 + c^2 - 10c} = \sqrt{(c - 5)^2 + 16} \geq 4$$

$$|2025 - d| \geq 0 \quad \dots\dots\dots 7,5p$$

Suma lor este  $\geq 12$ . Obținem a=8, b=6, c=5, d=2025 și  $m_a = 511 \quad \dots\dots\dots 5p$

## Subiectul 2 (22,5 puncte)

Fie a,b,c numere reale nenule cu  $a+b+c \neq 0$  care verifică egalitatea :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Arătați că:  $\frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}}$

**Soluție și barem:**

Egalitatea  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$  se transformă echivalent astfel :  $\frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc \quad \dots\dots\dots 2,5p$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot (ab+bc+ac) + c(ab+bc+ca) = abc \Leftrightarrow (a+b) \cdot (ab+bc+ac) + abc + bc^2 + ac^2 = abc \Leftrightarrow (a+b) \cdot (ab+bc+ac) + c^2(a+b) = 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot (ab+bc+ac+c^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \cdot [b(a+c) + c(a+c)] = 0 \Leftrightarrow (a+b) \cdot (b+c) \cdot (a+c) = 0 \quad \dots\dots\dots 10p$$

Atunci  $a+b=0$  sau  $b+c=0$  sau  $a+c=0$ .

Dacă  $a+b=0$  rezultă  $a=-b$ . ..... 3p

$$\frac{1}{a^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = -\frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{b^{2025}} + \frac{1}{c^{2025}} = \frac{1}{c^{2025}}, \text{ iar}$$

$$\frac{1}{a^{2025} + b^{2025} + c^{2025}} = \frac{1}{-b^{2025} + b^{2025} + c^{2025}} = \frac{1}{c^{2025}}, \text{ și are loc egalitatea cerută.}$$

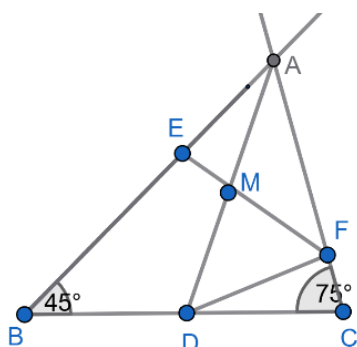
La fel se procedează în cazurile  $b=-c$  sau  $c=-a$ , provenite din  $b+c=0$ , respectiv  $c+a=0$ . .....7p

**Subiectul 3 (22,5 puncte)**

Se consideră triunghiul ABC în care  $m(\angle ABC) = 45^\circ$ ,  $m(\angle ACB) = 75^\circ$ . Fie M mijlocul bisectoarei  $[AD]$ ,  $D \in (BC)$ . Fie E piciorul perpendicularei din M pe AB. Fie  $ME \cap AC = \{F\}$ . Dacă  $AC = 8$  cm, calculați lungimea segmentului  $[DF]$ .

\*\*\*

**Soluție și barem:**



$$m(\angle BAC) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ.$$

$$\text{Rezultă } m(\angle CAD) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle ADC) = 75^\circ \quad \dots\dots\dots 2,5p$$

$$\triangle ADC \text{ isoscel, } AD=AC=8 \text{ cm. Rezultă } AM=MD=4 \text{ cm.} \quad \dots\dots\dots 4p$$

În  $\triangle AEM$ ,  $m(\sphericalangle E) = 90^\circ$ ,  $m(\sphericalangle A) = 30^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EMA) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AMF) = 120^\circ \Rightarrow$   
 $m(\sphericalangle AFM) = 30^\circ$  ..... 10p

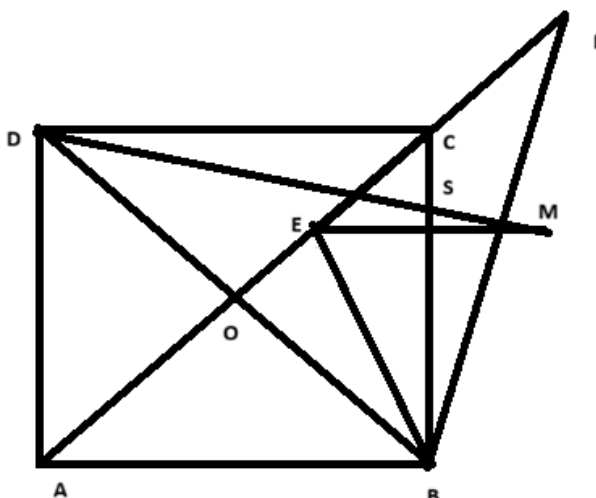
$\triangle AFM$  isoscel,  $AM=MF=4$  cm

$\triangle DMF$ ,  $m(\sphericalangle DMF) = 60^\circ$ ,  $MF=MD=4$  cm. Rezultă că  $\triangle DMF$  este echilateral.

$DF=4$  cm. .... 6p

#### **Subiectul 4 (22,5 puncte)**

În pătratul  $ABCD$  fie  $E \in (AC)$  astfel încât  $\sphericalangle CBE = 30^\circ$ . Fie punctul  $F$  simetricul lui  $E$  față de  $C$ , iar



$M$  simetricul lui  $E$  față de  $BC$ .

- Arătați că  $BF=DM$ .
- Dacă  $BC \cap DM = \{S\}$ , demonstrați că  $BSFM$  este romb.

#### **Soluție și barem:**

- Cum  $M$  este simetricul lui  $E$  față de  $BC$  și  $\sphericalangle CBE = 30^\circ$ , se obține că triunghiul  $BEM$  este echilateral, deci  $BE=EM=BM$ . .... 2,5p

Fie  $\{R\}=BC \cap EM$ . Atunci  $RC$  este linie mijlocie în triunghiul  $EMF$ , deci  $RC \parallel MF$  și prin urmare  $BS \parallel MF$ . .... 3p

Notăm  $\{G\}=DC \cap MF$ . Cum  $MF \parallel BC$ , rezultă că  $DG \perp MF$ , iar  $CG$  este linie mijlocie în triunghiul  $EMF$ . Deducem că triunghiul  $DMF$  este isoscel cu  $DF=DM$  (1)

De asemenea, în triunghiul  $BDF$ ,  $FO$  este mediatoare,  $\{O\}=AC \cap BD$ , deci  $DF=BF$  (2).

Din (1) și (2) se obține că  $DM=BF$ . .... 4p



- b) Triunghiul EMF este dreptunghic isoscel , deci  $MF=ME=BM$ . Prin urmare triunghiul BMF este isoscel cu  $\angle MBF = \angle MFB$ . ..... 3p

Din  $\angle BMF = \angle BME + \angle EMF = 150^\circ$  reiese  $\angle MBF = 15^\circ$ , deci  $\angle FBS = 15^\circ$ . Obținem  $\angle FBD = 60^\circ$  și , din (2), reiese că triunghiul FBD este echilateral . ..... 4p

Deducem că BD este mediatoarea segmentului BF. .... 3p

Astfel, în triunghiul MBS, BF este înălțime și bisectoare, de unde  $SF=SB=BM=MF$ .....3p